2019年　東大数学　理系第4問

(1)

$5n^2+9 = 5(n^2+1)+4$

ユークリッドの互除法より、
$5n^2+9$ と n^2+1 の最大公約数は
n^2+1 と $\underset{\sim}{4}$ の　：　に等しい。

4の約数は1,2,4のみなので、
d_nの候補は1,2,4だけ。
登場する素因数は2だけなので、
このあと、偶奇で場合をわける。

(i) $n=2m$ (mは整数) のとき
$n^2+1=4m^2+1$ となり、奇数。
n^2+1 と 4 は互いに素となり　$d_n=1$

(ii) $n=2m-1$ (mは整数) のとき、
$n^2+1=(2m-1)^2+1=4m^2-4m+2$
$=2\{2m(m-1)+1\}$
$=2\times$(奇数)　となり
2の素因数は1つのみ。よって　$d_n=2$

以上より、nが偶数のとき　$d_n=1$
nが奇数のとき　$d_n=2$ //

(2) 補

$\boxed{\begin{array}{l}\text{2整数 } x, y \text{ が互いに素のとき} \\ xy \text{ が平方数} \iff x \text{ と } y \text{ 両方とも平方数}\end{array}}$

これを利用する。

(i) $n=2m$ の時、(1)より n^2+1 と $5n^2+9$ は互いに素。
よって、$(n^2+1)(5n^2+9)$ が平方数になるには、
n^2+1 と $5n^2+9$ がともに平方数にならなければならない。

しかし、$\underset{\sim\sim\sim\sim}{n^2 < n^2+1 < (n+1)^2}$ より
n^2+1 は平方数にならない。
よって、確かに $(n^2+1)(5n^2+9)$ は平方数でない。

→ $n^2+1=k^2$ とおいて、(n,k) の解が存在しないことを示してもよい。

(ii) $n=2m-1$ の時、(1)より n^2+1 と $5n^2+9$ の最大公約数が2なので、

$$\begin{cases} n^2+1=2M \\ 5n^2+9=2N \end{cases}$$

(NとMは互いに素な整数) とおける

このとき $(n^2+1)(5n^2+9)=2^2\times M\times N$ なので、
補 より M と N が共に平方数でなければならない。

ここで、mod 5 を考える。

$5n^2+9=2N$ に $n=2m-1$ を代入して、
$2N=5(2m-1)^2+9$
$2N=20m^2-20m+14$
$N=10m^2-10m+7$
$=5(2m^2-2m+1)+2$　なので
$N\equiv 2 \pmod 5$ …①

矛盾する

一方、任意の自然数 a に対して、

mod 5 の表

a	0	1	2	3	4
a^2	0	1	4	4	1

であるから、

Nが平方数であるなら、$N\equiv 0$ または $N\equiv 1$ または $N\equiv 4$
となるはずである。…②

よって①と②からNは平方数ではないため、$n=2m-1$ のときも、$(n^2+1)(5n^2+9)$ は平方数ではない。

以上、題意は示された。